第 2 节 等差、等比数列的基本性质（★★）

强化训练

类型Ⅰ：等差数列的性质应用

1．（2023•河南郑州模拟•★）在等差数列$\{a_n\}$中，a_6，a_7是方程$x^2+2x-3=0$的两根，则$\{a_n\}$的前 12 项和$S_{12}=$（　　）

（A）12　　（B）18　　（C）-18　　（D）-12

答案：D

解析：注意到a_6，a_7下标之和为 13，$S_{12}=\dfrac{12(a_1+a_{12})}{2}$，涉及的下标之和也为 13，故用下标和性质算，

由韦达定理，$a_6+a_7=-2$，所以$S_{12}=\dfrac{12(a_1+a_{12})}{2}=6(a_1+a_{12})=6(a_6+a_7)=-12$.

2．（2022•浙江宁波模拟•★）已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均为等差数列，且$a_3+b_5=4$，$a_5+b_9=8$，则$a_4+b_7=$（　　）

（A）5　　（B）6　　（C）7　　（D）8

答案：B

解析：注意到$a_3+a_5=2a_4$，$b_5+b_9=2b_7$，故要求a_4+b_7，将所给两式相加即可，

$\begin{cases}a_3+b_5=4\\a_5+b_9=8\end{cases}\Rightarrow(a_3+b_5)+(a_5+b_9)=(a_3+a_5)+(b_5+b_9)=2a_4+2b_7=12\Rightarrow a_4+b_7=6$.

3．（2022•重庆模拟•★★）中国古代数学著作《九章算术》中有如下问题："今有金箠，长五尺，斩本一尺，重四斤，斩末一尺，重二斤. 问次一尺各重几何"？意思是："现有一根金锤，长五尺，一头粗一头细. 在粗的一端截下一尺，重四斤；在细的一端截下一尺，重二斤. 问依次每一尺各重几斤"？根据已知条件，若金锤由粗到细是均匀变化的，则中间三尺的重量为（　　）

（A）3 斤　　（B）6 斤　　（C）9 斤　　（D）12 斤

答案：C

解析：设从粗到细的五尺的重量分别为a_1，a_2，$\cdots$，a_5，则$\{a_n\}(n=1,2,\cdots,5)$为等差数列，

由题意，$a_1=4$，$a_5=2$，要求的是$a_2+a_3+a_4$，可用下标和性质转换成$3a_3$，于是先算a_3，

所以$a_1+a_5=2a_3=6$，从而$a_3=3$，故$a_2+a_3+a_4=3a_3=9$.

4．（2023•河北石家庄模拟•★★）记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_3=5$，$a_5+a_{11}=20$，则$S_{10}=$______.

答案：75

解析：由题意，$S_{10}=\dfrac{10(a_1+a_{10})}{2}=5(a_1+a_{10})$ ①，

观察发现由 a_5+a_{11} 可快速求出 a_8，跟已知的 a_3 下标和为 11，故可用下标和性质求 a_1+a_{10}，

$a_5+a_{11}=2a_8=20\Rightarrow a_8=10$，又 $a_3=5$，所以 $a_1+a_{10}=a_3+a_8=15$，代入①得 $S_{10}=75$.

5.（2022 •江苏宿迁模拟 •★★★）若两个等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n，B_n，且 $\dfrac{A_n}{B_n}=\dfrac{2n+1}{3n-2}$，则 $\dfrac{a_5+a_{13}}{b_3+b_{15}}$ 的值为_____.

答案：$\dfrac{5}{7}$

解析：给出 A_n 和 B_n 的比值，可利用 $A_{2n-1}=(2n-1)a_n$，$B_{2n-1}=(2n-1)b_n$ 转换成 a_n 与 b_n 的比值，

由题意，$\dfrac{a_5+a_{13}}{b_3+b_{15}}=\dfrac{2a_9}{2b_9}=\dfrac{a_9}{b_9}$，又 $\dfrac{A_n}{B_n}=\dfrac{2n+1}{3n-2}$，所以 $\dfrac{A_{17}}{B_{17}}=\dfrac{17a_9}{17b_9}=\dfrac{a_9}{b_9}=\dfrac{2\times17+1}{3\times17-2}=\dfrac{5}{7}$.

6.（2022 • 重庆模拟 • ★★）已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_3=15$，$S_9=75$，则 $S_6=$（　　）

（A）40　（B）45　（C）50　（D）55

答案：A

解析：观察发现 S_3，S_9，S_6 的下标都是 3 的倍数，于是想到等差数列的片段和性质，

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以 S_3，S_6-S_3，S_9-S_6 成等差数列，故 $2(S_6-S_3)=S_3+(S_9-S_6)$，

将 $\begin{cases}S_3=15\\S_9=75\end{cases}$ 代入可得 $2(S_6-15)=15+(75-S_6)$，解得：$S_6=40$.

7.（★★★）等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\dfrac{S_3}{S_6}=\dfrac{1}{4}$，则 $\dfrac{S_{15}}{S_9}=$_____.

答案：$\dfrac{25}{9}$

解析：观察发现 S_3，S_6，S_9，S_{15} 的下标都是 3 的倍数，于是联想到等差数列的片段和性质，

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以 S_3，S_6-S_3，S_9-S_6，$S_{12}-S_9$，$S_{15}-S_{12}$ 成等差数列，设其公差为 d，

因为 $\dfrac{S_3}{S_6}=\dfrac{1}{4}$，所以可设 $S_3=m(m\neq0)$，则 $S_6=4m$，所以 $S_6-S_3=3m$，故 $d=(S_6-S_3)-S_3=2m$，

接下来可分别计算 S_9 和 S_{15}，再算 $\dfrac{S_{15}}{S_9}$，$S_9=(S_9-S_6)+(S_6-S_3)+S_3=(S_3+2d)+(S_3+d)+S_3=3S_3+3d=9m$，

$S_{15}=(S_{15}-S_{12})+(S_{12}-S_9)+S_9=(S_3+4d)+(S_3+3d)+S_9=2S_3+7d+S_9=2m+7\times2m+9m=25m$，

所以 $\dfrac{S_{15}}{S_9}=\dfrac{25m}{9m}=\dfrac{25}{9}$.

8.（2022 • 江苏海安模拟 • ★★★）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_{10}=110$，$S_{110}=10$，则 $S_{120}=$（　　）

（A）-10　（B）-20　（C）-120　（D）-110

答案：C

解法 1：可将已知条件用 a_1 和 d 来翻译，求出 a_1 和 d，再算 S_{120}，

设$\{a_n\}$的公差为d，则$\begin{cases}S_{10}=10a_1+45d=110\\S_{110}=110a_1+5995d=10\end{cases}$，解得：$a_1=\frac{659}{55}$，$d=-\frac{12}{55}$，

所以$S_{120}=120a_1+\frac{120\times119}{2}d=120\times\frac{659}{55}+60\times119\times(-\frac{12}{55})=-120$.

解法 2：条件涉及S_n且下标都是 10 的倍数，一般会考虑用片段和性质，但这里S_{10}，S_{110}，S_{120}下标距离较远，不易操作. 注意到给出的两个条件都与S_n有关，于是可考虑用性质“$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列”来处理，

由题意，$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列，设其公差为$d'$，$\begin{cases}S_{10}=110\\S_{110}=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{S_{10}}{10}=11\\\frac{S_{110}}{110}=\frac{1}{11}\end{cases}$，所以$\frac{S_{110}}{110}-\frac{S_{10}}{10}=100d'=\frac{1}{11}-11=-\frac{120}{11}$，

解得：$d'=-\frac{6}{55}$，故$\frac{S_{120}}{120}=\frac{S_{10}}{10}+110d'=11+110\times(-\frac{6}{55})=-1$，所以$S_{120}=-120$.

类型Ⅱ：等比数列的性质应用

9．（2023·山东济南模拟·★）已知等比数列$\{a_n\}$满足$a_3a_{10}a_{17}=8$，则$a_{10}=$（　　）

（A）1　（B）2　（C）4　（D）8

答案：B

解析：由题意，$a_3a_{10}a_{17}=a_3a_{17}a_{10}=a_{10}^2\cdot a_{10}=a_{10}^3=8$，所以$a_{10}=2$.

10．（2022·四川绵阳模拟·★★）已知等比数列$\{a_n\}$满足$\log_2a_2+\log_2a_{11}=1$，且$a_5a_6a_8a_9=16$，则数列$\{a_n\}$的公比为（　　）

（A）2　（B）4　（C）±2　（D）±4

答案：A

解析：$\log_2a_2+\log_2a_{11}=1\Rightarrow\log_2(a_2a_{11})=1\Rightarrow a_2a_{11}=2$，$a_5a_6a_8a_9=(a_6a_8)^2=16\Rightarrow a_6a_8=\pm4$，

±4都可取吗？由于$a_6a_8=a_6a_6q^2=a_6^2q^2>0$，故只能取正，

所以$a_6a_8=4$，故$\frac{a_6a_8}{a_2a_{11}}=\frac{a_1q^5\cdot a_1q^7}{a_1q\cdot a_1q^{10}}=q=2$.

【反思】在等比数列$\{a_n\}$中，$a_{2n-1}=a_1\cdot q^{2n-2}$，注意到$q^{2n-2}>0$，所以$a_{2n-1}$与$a_1$同号，故$\{a_n\}$中所有奇数项符号相同；同理，$a_{2n}=a_2\cdot q^{2n-2}$，所以$\{a_n\}$中所有偶数项也同号.

11．（2022·江西模拟·★★）已知S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_4=6$，$S_8=18$，则$a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=$（　　）

（A）96　（B）162　（C）243　（D）486

答案：A

解析：$a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=S_{20}-S_{16}$，注意到$S_{20}$，$S_{16}$，$S_4$，$S_8$下标都是 4 的倍数，故想到片段和性质，

因为$\{a_n\}$是等比数列，且其公比$q\neq-1$，否则$S_4=S_8=0$，与题意不符，

所以S_4，S_8-S_4，$S_{12}-S_8$，$S_{16}-S_{12}$，$S_{20}-S_{16}$成等比数列，设其公比为p，则$p=\frac{S_8-S_4}{S_4}=\frac{18-6}{6}=2$，

故 $a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=S_{20}-S_{16}=S_4\cdot p^4=6\times 2^4=96$.

12．（2023・福建模拟・★★★）设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_3=\frac{1}{3}S_6$，则 $\frac{S_9}{S_6-S_3}=$______.

答案： $\frac{7}{2}$

解析： 注意到 S_3， S_6， S_9 下标都为 3 的整数倍，故联想到等比数列的片段和性质，

因为 $S_3=\frac{1}{3}S_6$，所以可设 $S_3=m$，则 $S_6=3m$，因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 S_3， S_6-S_3， S_9-S_6 成等比数列，

设其公比为 q，则 $q=\frac{S_6-S_3}{S_3}=\frac{3m-m}{m}=2$，所以 $S_9=(S_9-S_6)+(S_6-S_3)+S_3=S_3q^2+S_3q+S_3=7m$，

故 $\frac{S_9}{S_6-S_3}=\frac{7m}{3m-m}=\frac{7}{2}$.